数理解析研究所講究録
1103巻 1999年 60-70

二次形式の局所密度の明示公式について

佐藤文広（立教大学理学部），広中由美子（早稲田大学教育学部）

1 Introduction

1.1. $p \geq 2$ を奇素数, m, n を $m \geq n > 0$ を満たす自然数とする. S, T をそれぞれ, サイズ m, n の非退化整数係数対称行列とし,

$$N_{p^l}(T,S) = \sharp\left\{x \in M_{m,n}(\mathbb{Z}_p/(p^l)) \,\middle|\, {}^t xSx \equiv T \bmod p^l\right\}$$

とおく. このとき, 十分大きな自然数 $l \gg 1$ に対して,

$$\alpha_p(T,S) = p^{-l(mn-n(n+1)/2)} N_{p^l}(T,S)$$

は l によらぬ一定値を与える. この量 $\alpha_p(T,S)$ は T の S による表現の局所密度と呼ばれる二次形式論における重要な不変量である. 本稿では, $p \neq 2$ の場合に S, T になんの制限も付けずに $\alpha_p(T,S)$ の明示公式が得られることを述べる.

1.2. Siegel 公式 ([S]) によれば, $\alpha_p(T,S)$ のすべての p をわたる積 (無限素点における $\alpha_p(T,S)$ の対応物を含めて) は, 不定方程式 ${}^t xSx = T$ の整数解の密度を S の種に含まれる類全体について加重平均を取ったものに等しい. 従って, 局所密度は $\mathbb{Z}_p$ 上の不変量であるにとどまらず Siegel 公式を通じて $\mathbb{Z}$ 上の整数論に一定の情報を与える (たとえば [Ki4] を見よ). また Siegel 公式の解析的な version によれば, この量を調べることは Eisenstein 級数の Fourier 係数を研究しているとも解釈される. 一方, 筆者らは, $\mathbb{Q}_p$ 上の対称空間の球関数を局所密度の母関数ととらえる見方から, $\alpha_p(T,S)$ に関心を持ってきた. いずれにせよ, $\alpha_p(T,S)$ を S, T の不変量を用いて明示的に表す公式を求めることは興味ある問題である.

この問題は長らく極めて難しい問題と考えられていたように思われるが, 近年重要な進展が相次いだ. その一つは, Katsurada による結果で, [Ka2] において

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \perp \cdots \perp \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の場合に, 任意の T に対して $\alpha_p(T,S)$ の明示公式を与えた. この S に対する $\alpha_p(T,S)$ の計算は Siegel の Eisenstein 級数の Fourier 係数の計算と思えることもあって, 多くの研究の蓄積があった. 例えば, Siegel [S] (S, T がともに unimodular の場合), Ozeki [O], Kitaoka [Ki1] (S が unimodular で $n = 2$ の場合, Maass [M1], [M2] もある), Kitaoka [Ki2] (S が

unimodular で $n=3$, $p\neq 2$ の場合), Katsurada [Ka1] (S が unimodular で $n=3$, p が任意の場合) などがあり, Katsurada の結果はこれらを著しく一般化するものであった.

これに対して S が任意の場合は, $S=T$, すなわち, 直交群の体積の計算に相当する場合 ([P], [W]) を除いて一般的な結果はあまり知られていなかったが, Yang ([Y]) は, $n=2$, $p\neq 2$ の場合に任意の S,T に対して $\alpha_p(T,S)$ を計算することに成功した.

これら 2 つの仕事で用いられた方法は全く異なるものである. Katsurada は, この間氏が一貫して追及されていた局所密度の間に成り立つ漸化式に, $Sp(n)$ の Siegel parabolic 部分群に関する実解析的 Eisenstein 級数の関数等式から得られる関係式を組み合わせると, 計算を小さな n の場合に帰着させられる簡明な漸化式が得られることを見いだした. Yang の計算は, 局所密度を指標和で表しその指標和を brute force で計算するという, より初等的なやり方でなされている. 本稿で我々が採用する方法は, Yang の方法 (その基礎となる変形はすでに [HS], [H1] で利用したものと同じだが) を洗練したものと言ってよい. 我々の方法のポイントは, §3 の末尾でより詳しく説明する.

1.3. 以下, §2 で主結果を紹介した後, §3 で局所密度の計算の基礎となる指標和の変形について説明する. その変形の結果, 局所密度の計算は,

1. $\mathbb{Z}_p$ 上の対称行列の $\Gamma_0(p)$-同値類の分類,
2. $\Gamma_0(p)$ と直交群の共通部分の体積の計算,
3. ある種の Gauss 和の計算,

という 3 段階に分けられる. §4 では, その 3 段階がどのように実行されるかをスケッチする.

2 主結果

$p\neq 2$ とする. S,T が任意の場合の結果を述べるためには, かなりな記号の準備が必要である. まず, S,T は次のように対角化されているとしてよい:

$$S=\begin{pmatrix} u_1p^{\alpha_1} & & & \\ & u_2p^{\alpha_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & u_mp^{\alpha_m}\end{pmatrix} \quad\text{and}\quad T=\begin{pmatrix} v_1p^{\beta_1} & & & \\ & v_2p^{\beta_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & v_np^{\beta_n}\end{pmatrix},$$

ここで $u_i,v_j\in\mathbb{Z}_p^\times$ であり, α_i,β_j は非負整数であるとする.

$\mathfrak{S}_n$ で n 次対称群を表し, $\mathfrak{S}_n$ は $I=\{1,2,\ldots,n\}$ に自然に作用しているものとする. $\sigma\in\mathfrak{S}_n$ で $\sigma^2=1$ となるものに対して

$$\begin{aligned} c_1(\sigma) &= \sharp\{i\in I\mid \sigma(i)=i\},\\ c_2(\sigma) &= \sharp\{i\in I\mid \sigma(i)\neq i\},\\ e_{\sigma,i,k} &= \begin{cases} 0 & (k\leq i,\ k\leq\sigma(i)),\\ 1 & (\sigma(i)<k\leq i \ \text{ or }\ i<k\leq\sigma(i)),\\ 2 & (i<k,\ \sigma(i)<k)\end{cases}\end{aligned}$$

とおく. $I = I_0 \cup \cdots \cup I_r$ を I の σ-stable な部分集合の disjoint union への分割とし, この分割に対して

$$n_l = \sharp(I_l), \quad n^{(l)} = n_l + n_{l+1} + \cdots + n_r \quad (l \geq 0),$$

$$\begin{aligned}
t(\sigma, \{I_i\}) &= \sum_{l=0}^{r} \sharp\{(i,j) \in I_l \times I_l \mid i < j < \sigma(i),\ \sigma(j) < \sigma(i)\},\\
\tau(\{I_i\}) &= \sum_{l=0}^{r} \sharp\{(i,j) \in I_l \times (I_0 \cup \cdots \cup I_{l-1}) \mid j < i\},\\
c_1^{(l)}(\sigma) &= \sharp\{i \in I_l \cup \cdots \cup I_r \mid \sigma(i) = i\} \quad (l \geq 0)
\end{aligned}$$

とおく. さらに,

$$b_l(\sigma, T) = \min\left[\{\beta_i \mid i \in I_l,\ \sigma(i) > i\} \cup \{\beta_i + 1 \mid i \in I_l,\ \sigma(i) \leq i\},\right]$$

$$\begin{aligned}
A(\lambda) &= \{k \mid 1 \leq k \leq m,\ \alpha_k \not\equiv \lambda \bmod 2,\ \alpha_k + \lambda < 0\},\\
B_i(\lambda) &= \{k \mid 1 \leq k \leq i-1,\ \beta_k \not\equiv \lambda \bmod 2,\ \beta_k + \lambda < 0\}\\
&\qquad \cup \{k \mid i+1 \leq k \leq n,\ \beta_k \not\equiv \lambda \bmod 2,\ \beta_k + \lambda + 2 < 0\}
\end{aligned}$$

と定義する. 最後に

$$\begin{aligned}
\rho_{l,\lambda}(\sigma; T, S) &= \frac{n_l}{2} \sum_{k=1}^{m} \min\{\alpha_k + \lambda, 0\} + \frac{1}{2} \sum_{i \in I_l} \sum_{k=1}^{n} \min\{\beta_k + e_{\sigma,i,k} + \lambda, 0\}\\
\xi_{i,\lambda}(T, S) &= 2 \prod_{k \in A(\lambda)} \left(\frac{-u_k}{p}\right) \prod_{k \in B_i(\lambda)} \left(\frac{v_k}{p}\right)\\
&\quad \times \begin{cases}
0 & (\beta_i + \lambda \geq 0,\ \sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda) \not\equiv 0 \bmod 2),\\
(1 - p^{-1}) \cdot \left(\frac{-1}{p}\right)^{(\sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda))/2} & (\beta_i + \lambda \geq 0,\ \sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda) \equiv 0 \bmod 2),\\
\left(\frac{-1}{p}\right)^{(\sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda) + 1)/2} \left(\frac{v_i}{p}\right) & (\beta_i + \lambda = -1,\ \sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda) \not\equiv 0 \bmod 2\\
-p^{-1/2} \cdot \left(\frac{-1}{p}\right)^{(\sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda))/2} & (\beta_i + \lambda = -1,\ \sharp A(\lambda) + \sharp B_i(\lambda) \equiv 0 \bmod 2
\end{cases}
\end{aligned}$$

として,

$$\Xi_{l,\lambda}(\sigma; T, S) = p^{\rho_{l,\lambda}(\sigma; T, S)} \prod_{\substack{i \in I_l \\ \sigma(i) = i}} \xi_{i,\lambda}(T, S)$$

と定義する. 以上の記号を用いると, $\alpha_p(T, S)$ は次のように表せる.

Theorem

$$\begin{aligned}
\alpha_p(T, S) &= \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma^2 = 1}} 2^{-c_1(\sigma)} (1 - p^{-1})^{c_2(\sigma)/2} p^{-c_2(\sigma)/2} \sum_{I = I_0 \cup \cdots \cup I_r} p^{-\tau(\{I_i\}) - t(\sigma, \{I_i\})}\\
&\quad \times \sum_{k=0}^{r+1} \frac{2^{c_1^{(k)}(\sigma)} (1 - p^{-1})^{c_1^{(k)}(\sigma)} p^{-\frac{1}{2} \sum_{l=k+1}^{r} n^{(l)}(n^{(l)}+1)}}{\prod_{l=k}^{r} \left(1 - p^{-n^{(l)}(n^{(l)}+1)/2}\right)}\\
&\quad \times \sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}}{}' p^{\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \nu_l \{n^{(k)}(n^{(k)}+1) - n^{(l)}(n^{(l)}+1)\}} \prod_{l=0}^{k-1} \Xi_{l, \nu_0 + \cdots + \nu_l}(\sigma; T, S).
\end{aligned}$$

ここで, $I = I_0 \cup \cdots \cup I_r$ に関する和は I の σ-*stable* な部分集合への分割のすべてをわたる. また, $\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}$ に関する和は $k \geq 1$ の場合には,

$$\nu_1, \ldots, \nu_{k-1} \geq 1, \quad -1 \geq \nu_0 + \nu_1 + \cdots + \nu_l \geq -b_l(\sigma, T) \quad (l = 0, 1, \ldots, k-1)$$

を満たすすべての $(\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}) \in \mathbb{Z}^k$ を渡り, $k = 0$ の場合には 1 と理解する. □

S を上の定理と同じとし,

$$S_g = S \perp \begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ 1_g & 0 \end{pmatrix} \quad (g \geq 0)$$

とおく. このとき, $\alpha_p(T, S_g)$ は $X = p^{-g}$ の多項式となることは容易に分かるが,

$$\begin{aligned} \rho_{l,\lambda}(\sigma; T, S_g) &= \rho_{l,\lambda}(\sigma; T, S) + n_l \lambda g, \\ \xi_{i,\lambda}(T, S_g) &= \xi_{i,\lambda}(T, S), \end{aligned}$$

であることに注意すれば, 上の定理によりその具体形は次のようになる.

Corollary

$$\begin{aligned} \alpha_p(T, S_g) = & \sum_{\substack{\sigma \in \mathfrak{S}_n \\ \sigma^2 = 1}} 2^{-c_1(\sigma)} (1 - p^{-1})^{c_2(\sigma)/2} p^{-c_2(\sigma)/2} \sum_{I = I_0 \cup \cdots \cup I_r} p^{-\tau(\{I_i\}) - t(\sigma, \{I_i\})} \\ & \times \sum_{k=0}^{r+1} \frac{2^{c_1^{(k)}(\sigma)} (1 - p^{-1})^{c_1^{(k)}(\sigma)} p^{-\frac{1}{2} \sum_{l=k+1}^{r} n^{(l)}(n^{(l)}+1)}}{\prod_{l=k}^{r} \left(1 - p^{-n^{(l)}(n^{(l)}+1)/2}\right)} \\ & \times \sum_{\nu_0, \nu_1, \ldots, \nu_{k-1}}{}' \left(p^{\frac{1}{2} \sum_{l=0}^{k-1} \nu_l \{n^{(k)}(n^{(k)}+1) - n^{(l)}(n^{(l)}+1)\}} \prod_{l=0}^{k-1} \Xi_{l, \nu_0 + \cdots + \nu_l}(\sigma; T, S) \right) X^{\sum_{l=0}^{k-1} |\nu_0 + \cdots + \nu_l| n_l}. \end{aligned}$$

以上の結果と, たとえば S が unimodular の場合の既知の結果とを比較することは決して容易ではない. そこには, 必ずしも自明でない組み合わせ論的恒等式がいろいろと潜んでいるようであり, 筆者は未だ十分な理解に至っていない.

3 局所密度の指標和表示

$x \in \mathbb{Q}_p$ に対し, $\{x\}$ でその分数部分, すなわち, $\{x\} = x \bmod \mathbb{Z}_p \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \hookrightarrow \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ で定まる $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ の元として, $\mathbb{Q}_p$ の加法的指標 ψ を次のように定義する：

$$\psi : \mathbb{Q}_p \longrightarrow \mathbb{C}^\times, \quad \psi(x) = \exp(2\pi i \{x\}).$$

このとき, $\alpha_p(T, S)$ が次の p 進積分（指標和）で表されることは, よく知られている.

Lemma 3.1

$$\alpha_p(T, S) = \int_{Sym_n(\mathbb{Q}_p)} dY \int_{M_{m,n}(\mathbb{Z}_p)} \psi(\operatorname{tr} Y(S[x] - T))\, dx.$$

ただし, $Sym_n(\mathbb{Q}_p)$ 上の積分は絶対収束はしないので,

$$\int_{Sym_n(\mathbb{Q}_p)} = \lim_{l\to\infty}\int_{Sym_n(p^{-l}\mathbb{Z}_p)}$$

と理解する. □

Γ で $GL_n(\mathbb{Z}_p)$ の合同部分群を表す. また, 簡単のため,

$$S_n(\mathbb{Q}_p) = \{Y \in Sym_n(\mathbb{Q}_p) \mid \det Y \neq 0\}$$

とおく. Γ は $S_n(\mathbb{Q}_p)$ に $Y \mapsto \gamma\cdot Y = \gamma Y\,{}^t\gamma$ により作用する. $Y \in S_n(\mathbb{Q}_p)$ に対して

$$\alpha_p(\Gamma; Y) = \lim_{l\to\infty} p^{-ln(n-1)/2} N_{p^l}(\Gamma; Y),$$

と定義しよう. ただし,

$$N_{p^l}(\Gamma; Y) = \sharp\left\{\gamma \in \Gamma \bmod p^l \;\middle|\; \gamma Y\,{}^t\gamma \equiv Y \bmod p^l\right\}$$

とおいた.

Proposition 3.2 $T, Y \in S_n(\mathbb{Q}_p)$, $S \in S_m(\mathbb{Q}_p)$ に対して

$$\begin{aligned}\mathcal{G}(Y,S) &= \int_{M_{m,n}(\mathbb{Z}_p)} \psi(\mathrm{tr}(Y\cdot S[x]))\,dx,\\ \mathcal{G}_\Gamma(Y,T) &= \int_\Gamma \psi(-\mathrm{tr}(Y\cdot T[\gamma]))\,d\gamma,\end{aligned}$$

とおく. ここで, $d\gamma$ は $M_n(\mathbb{Z}_p)$ の *Haar* 測度であり $\int_{M_n(\mathbb{Z}_p)} d\gamma = 1$ と正規化されているものとする. このとき,

$$\alpha_p(T,S) = \sum_{Y\in\Gamma\backslash S_n(\mathbb{Q}_p)} \frac{\mathcal{G}_\Gamma(Y,T)\mathcal{G}(Y,S)}{\alpha_p(\Gamma;Y)}$$

が成り立つ. □

この等式は, Lemma 3.1 における $Sym_{\mathbb{Q}_p}$ 上の積分を Γ-同値類上の積分の和に分割してやれば容易に得られる.

Proposition 3.2 によれば, 局所密度 $\alpha_p(T,S)$ の計算は (適当な合同部分群 Γ に対し) 以下のことを実行すれば得られることになる:

1. $\Gamma\backslash S_n(\mathbb{Q}_p)$ を分類する;
2. $\Gamma\backslash S_n(\mathbb{Q}_p)$ の各同値類の代表元 Y に対して $\alpha_p(\Gamma;Y) = \mathrm{vol}(\Gamma\cap O(Y))$ を計算する.
3. $\Gamma\backslash S_n(\mathbb{Q}_p)$ の各同値類の代表元 Y に対して指標和 $\mathcal{G}(Y,S)$, $\mathcal{G}_\Gamma(Y,T)$ を計算する.

次節では, $p\neq 2$ のとき, $\Gamma = \Gamma_0(p)$ ととることにより上の 3 つの問題が完全に解ける, したがって局所密度 $\alpha_p(T,S)$ の計算がなされることを説明するが, その前に, 上記の公式について若干のコメントを付け加えておこう.

$\Gamma = GL_n(\mathbb{Z}_p)$ のとき, Proposition 3.2 の公式（積分としてではなく, 指標和として定式化されてはいるが）はすでに [H1] で導入され, Kitaoka [Ki3] の定義した局所密度に関連したある形式的巾級数が有理関数を表すことの証明, および, その有理関数の分母の決定に利用された. また, [HS] ではこの公式の交代行列に対する類似を用いて, 交代行列の局所密度の明示公式を得ている. 同じ方法は, [H2] で unramified hermitian form の場合にも適用され, やはり局所密度の明示公式を得るために効果的に利用された. 一方, §1 で触れた最近の Yang [Y] の計算も $n=2$, $\Gamma = GL_2(\mathbb{Z}_p)$ の場合の同じ公式に基づいている.

さて, $\Gamma = GL_n(\mathbb{Z}_p)$ の場合, $S_n(\mathbb{Q}_p)$ の Γ-同値類の分類はよく知られている (たとえば, [C]). また, $\alpha_p(GL_n(\mathbb{Z}_p); Y)$ もすでに計算されている ($p \neq 2$ のときは [P], $p=2$ のときは [W]). そして, 2 つの指標和のうちの $\mathcal{G}(Y,S)$ の計算はありふれた Gauss 和の計算に容易に帰着する. したがって, この場合の困難はひとえに $\mathcal{G}_\Gamma(Y,T)$ の計算にあるのである. [HS] や [H2] では, この困難は, 交代行列やエルミート行列の空間上の p-進球関数の明示式と, それらの空間に Borel 部分群が作用して得られる p 進体上の概均質ベクトル空間のゼータ関数の関数等式を組み合わせるという方法で克服されている. 一方, [Y] では, サイズが 2 と小さいことを利用して, 積分 $\mathcal{G}_\Gamma(Y,T)$ を積分領域 $GL_2(\mathbb{Z}_p)$ を分割して無理矢理計算してしまっている.

筆者らは長い間, 球関数・ゼータ関数を用いる方法を対称行列に適用することを考えてきたが, 球関数論の複雑さのためうまくいかなかった. しかし, [Y] を検討してみると, $\mathcal{G}_\Gamma(Y,T)$ の積分範囲を分割すると考えるより, Proposition 3.2 の公式において Γ をより小さい群で置き換えると考える方がより透明な見方であることに気がつく. 実際, $\Gamma = \Gamma_0(p)$ とすることで, $\mathcal{G}_\Gamma(Y,T)$ の計算上の困難が Γ-同値類の分類（問題 1）と $\alpha_p(\Gamma, Y)$ の計算（問題 2）にも振り分けられて, すべての問題が初等的に解決できる程度の難しさにおさまるのである.

分かってしまえば初等的なこの方法が, 長い間気づかれなかった理由は明らかなように思われる. すなわち, $GL_n(\mathbb{Z}_p)$-不変量である局所密度の計算をするために, わざわざより小さい対称性である $\Gamma_0(p)$ による分類を用いているからである. しかし, p 進体上の半単純代数群の帯球関数の Macdonald による計算が Iwahori 部分群（$=\Gamma_0(p)$）上の積分を Weyl 群で足しあげる形でなされていることを思い出せば, 本稿での方法は極めて自然なものであると感じられてくる. 実際, 定理における対称群 $\mathfrak{S}_n$（の位数 2 の元のなす部分集合）は GL_n/O_n の Borel 部分群軌道を代表する Weyl 群の元からなっていると思うことができることに注意しておこう.

4　$\alpha_p(T,S)$ の計算の概略

以下, 常に $p \neq 2$ とする.

4.1　対称行列の $\Gamma_0(p)$-同値類の分類

$$\Gamma_0(p) = \{\gamma = (\gamma_{ij}) \in GL_n(\mathbb{Z}_p) \mid \gamma_{ij} \equiv 0 \bmod p \ (i > j)\}$$

とする. 非平方単数 $\delta \in \mathbb{Z}_p^\times \setminus (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ をとって固定しておく. §2 と同様に $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし, n 次対称群 $\mathfrak{S}_n$ が I に自然に作用しているものとする.

Theorem 4.1 Λ_n を, $(\sigma, e, \epsilon) \in \mathfrak{S}_n \times \mathbb{Z}^n \times \{1, \delta\}^n$ で

$$\sigma^2 = 1, \quad e_{\sigma(i)} = e_i \ (i \in I), \quad \epsilon_i = 1 \ (i \in I,\ \sigma(i) \neq i)$$

を満たすものの全体とする. 各 $(\sigma, e, \epsilon) \in \Lambda_n$ に対し対称行列 $S_{\sigma,e,\epsilon}$ を

$$S_{\sigma,e,\epsilon} = (s_{ij}), \quad s_{ij} = \epsilon_i p^{e_i} \delta_{i,\sigma(j)}$$

によって定める. ここで $\delta_{i,\sigma(j)}$ は *Kronecker* のデルタである. このとき, $\{S_{\sigma,e,\epsilon} \mid (\sigma, e, \epsilon) \in \Lambda_n\}$ は $S_n(\mathbb{Q}_p)$ における $\Gamma_0(p)$-同値類の完全代表形をなす. □

この定理は, 次のような手順で証明できる. まず, 定理に述べられているような形の代表元が取れることは, p 進絶対値のもっとも大きい行列成分 a_{ij} のうち (i, j) の辞書式順序に関して最初に現れるものを pivot として掃き出しを行う, という操作を繰り返して示される. 次に, unimodular な対称行列については, mod p により得られる有限体 $\mathbb{F}_p$ 上の対称行列の $GL_n(\mathbb{F}_p)$ の Borel 部分群（$= \Gamma_0(p)$ の mod p）による分類に帰着することに注意する. 有限体上の分類は, 非退化対称行列の空間を対称空間とみなせば [HW] の一般論の一例とも見なせるが, 直接的に行列計算で示すことも難しくない. 最後に, 上の標準形の間に $\Gamma_0(p)$-同値があれば, p 巾のもっとも低いところでの同値の存在, および, cancellation が可能であることが示される.

4.2 $\alpha_p(\Gamma_0(p); Y)$ の計算

$(\sigma, e, \epsilon) \in \Lambda_n$ とし, $\{e_1, \ldots, e_n\}$ に現れる整数を小さい順に並べて

$$\{\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r\}, \quad \lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_r$$

とする. また

$$I_i = \{j \in I \mid e_j = \lambda_i\} \quad (0 \leq i \leq r)$$

とおく. このとき, $I_0, \ldots, I_r$ は I の σ-stable な部分集合で $I = I_0 \cup I_1 \cup \cdots \cup I_r$ はもちろん disjoint union である.

$$I^{(i)} = I_i \cup I_{i+1} \cup \cdots \cup I_r \quad (0 \leq i \leq r)$$

とし, I_i, $I^{(i)}$ に含まれる元の個数を, それぞれ, n_i, $n^{(i)}$ とする:

$$n_i = \sharp(I_i), \quad n^{(i)} = \sharp(I^{(i)}) = n_i + \cdots + n_r.$$

さらに

$$\nu_i = \lambda_i - \lambda_{i-1} \quad (1 \leq i \leq r), \quad \nu_0 = \lambda_0.$$

とおく. このとき, $\nu_0 \in \mathbb{Z}$, $\nu_1, \ldots, \nu_r \in \mathbb{Z}_{>0}$ である.

Theorem 4.2

$$\begin{aligned}
c_1(\sigma) &= \sharp\{i \in I \mid \sigma(i) = i\}, \\
c_2(\sigma) &= \sharp\{i \in I \mid \sigma(i) \neq i\}, \\
t(\sigma, \{I_i\}) &= \sum_{l=0}^{r} \sharp\{(i,j) \in I_l \times I_l \mid i < j < \sigma(i),\ \sigma(j) < \sigma(i)\}, \\
\tau(\{I_i\}) &= \sharp\{(i,j) \in I \times I \mid j < i,\ e_j < e_i\}
\end{aligned}$$

とおく（$\tau(\{I_i\})$ は I の分割 $\{I_i\}$ のみに依存し，e によらないことに注意）．このとき，

$$\begin{aligned}
\alpha_p(\Gamma_0(p); S_{\sigma,e,\epsilon}) &= 2^{c_1(\sigma)}(1-p^{-1})^{c_2(\sigma)/2} p^{c(\sigma,e,\epsilon)}, \\
c(\sigma, e, \epsilon) &= -\frac{n(n-1)}{2} + \frac{1}{2}\sum_{l=0}^{r} \nu_l n^{(l)}(n^{(l)}+1) + \tau(\{I_i\}) + t(\sigma, \{I_i\}) + c_2(\sigma)/2
\end{aligned}$$

が成り立つ．□

まず，unimodular な対称行列の場合は，有限体 version である次の結果と一種の Hensel の補題とから導かれる．

非平方元 $\bar{\delta} \in \mathbb{F}_p^\times \setminus (\mathbb{F}_p^\times)^2$ を一つ選んで固定する．$(\sigma, \bar{\epsilon}) \in \mathfrak{S}_n \times \{1, \bar{\delta}\}^n$ で

$$\sigma^2 = 1, \quad \bar{\epsilon}_i = 1\ (i \in I,\ \sigma(i) \neq i)$$

を満たすものに対して，

$$S_{\sigma,\bar{\epsilon}} = (\bar{s}_{ij}), \quad \bar{s}_{ij} = \bar{\epsilon}_i \delta_{i,\sigma(j)}.$$

とおく．また，$B_n(\mathbb{F}_p)$ で $GL_n(\mathbb{F}_p)$ の上三角行列のなす部分群を表す．

Theorem 4.3

$$t(\sigma) = \sharp\{(i,j) \in I \times I \mid i < j < \sigma(i),\ \sigma(j) < \sigma(i)\}$$

とおくと，

$$\sharp\left\{b \in B_n(\mathbb{F}_p) \,\middle|\, bS_{\sigma,\bar{\epsilon}}\,{}^t b = S_{\sigma,\bar{\epsilon}}\right\} = 2^{c_1(\sigma)}(1-p^{-1})^{c_2(\sigma)/2} p^{c_2(\sigma)/2+t(\sigma)}$$

が成り立つ．□

一般の場合は，$\alpha_p(GL_n(\mathbb{Z}_p); Y)$ を計算する [P] の方法が多少ややこしくはなるが $\Gamma_0(p)$ に対しても適用できて，unimodular の場合に帰着させられる．

4.3 指標和 $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}_{\Gamma_0(p)}$ の計算

まず，通常の Gauss 和についての結果を思い出しておこう．$a \in \mathbb{Q}_p$ に対して

$$I(a) = \int_{\mathbb{Z}_p} \psi(ax^2)\, dx, \quad I^*(a) = \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \psi(ax^2)\, dx = I(a) - \frac{1}{p} I(ap^2)$$

とおく. このときよく知られているように, $\epsilon \in \mathbb{Z}_p^\times$, $t \in \mathbb{Z}$ に対して

$$I(\epsilon p^t) = \begin{cases} 1 & (t \geq 0), \\ p^{t/2} & (t < 0,\ t \equiv 0 \bmod 2), \\ p^{t/2}\psi_p\left(\frac{\epsilon}{p}\right) & (t < 0,\ t \not\equiv 0 \bmod 2), \end{cases} \qquad \psi_p = \begin{cases} 1 & (p \equiv 1 \bmod 4), \\ \sqrt{-1} & (p \equiv 3 \bmod 4) \end{cases}$$

と計算される. これから, 次の補題が成り立つことは容易に確かめられる.

Lemma 4.4 (i) $a \in \mathbb{Z}_p$ のとき $I(a) = 1$, $I^*(a) = 1 - p^{-1}$ である.

(ii) $\mathrm{ord}_p\, a < -1$ のとき $I^*(a) = 0$ である.

(iii) $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p} \psi(axy)\, dx\, dy = I(a)I(-a) = p^{\min\{\mathrm{ord}_p a, 0\}}$.

(iv) $\displaystyle\int_{\mathbb{Z}_p^\times \times \mathbb{Z}_p} \psi(auy)\, du\, dy = \begin{cases} 1 - p^{-1} & (\mathrm{ord}_p\, a \geq 0), \\ 0 & (\mathrm{ord}_p\, a < 0). \end{cases}$ □

$S = u_1 p^{\alpha_1} \perp u_2 p^{\alpha_2} \perp \cdots \perp u_m p^{\alpha_m}$ $(u_i \in \mathbb{Z}_p^\times,\ \alpha_i \in \mathbb{Z})$ とすると, 指標和 $\mathcal{G}$ は次のように計算される.

Proposition 4.5 $(\sigma, e, \epsilon) \in \Lambda_n$ に対し

$$\mathcal{G}(S_{\sigma,e,\epsilon}, S) = p^{\sum_{i=1\, \sigma(i)>i}^{n} \sum_{k=1}^{m} \min\{e_i + \alpha_k, 0\}} \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^{n} \prod_{k=1}^{m} I(\epsilon_i u_k p^{e_i + \alpha_k})$$

が成り立つ. □

証明は, $S_{\sigma,e,\epsilon}$ の定義により,

$$\mathrm{tr}\,(S_{\sigma,e,\epsilon} \cdot S[x]) = \sum_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)>i}}^{n} \sum_{k=1}^{m} 2u_k p^{e_i+\alpha_k} x_{\sigma(i),k} x_{i,k} + \sum_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^{n} \sum_{k=1}^{m} \epsilon_i u_k p^{e_i+\alpha_k} x_{ik}^2$$

となることに注意すれば, ほとんど明らかである.

$T = v_1 p^{\beta_1} \perp v_2 p^{\beta_2} \perp \cdots \perp v_n p^{\beta_n}$ $(v_i \in \mathbb{Z}_p^\times,\ \beta_i \in \mathbb{Z})$ とすると, 指標和 $\mathcal{G}_{\Gamma_0(p)}$ は次のように計算される.

Proposition 4.6 $(\sigma, e, \epsilon) \in \Lambda_n$ に対し, 指標和 $\mathcal{G}_{\Gamma_0(p)}(S_{\sigma,e,\epsilon}, T)$ は

$$(*) \qquad e_i \geq \begin{cases} -\beta_i - 1 & \textit{if } \sigma(i) \leq i, \\ -\beta_i & \textit{if } \sigma(i) > i, \end{cases} \qquad (i \in I)$$

以外の場合には, 0 となる. また, この条件 $(*)$ が成立しているときには,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{\Gamma_0(p)}(S_{\sigma,e,\epsilon}, T) &= (1 - p^{-1})^{c_2(\sigma)} p^{-n(n-1)/2 + d(\sigma,e,\beta)} \\ &\quad \times \prod_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^{n} \left\{ I^*(-\epsilon_i v_i p^{e_i+\beta_i}) \prod_{k=1}^{i-1} I(-\epsilon_i v_k p^{e_i+\beta_k}) \prod_{k=i+1}^{n} I(-\epsilon_i v_k p^{e_i+\beta_k+2}) \right\} \end{aligned}$$

となる. ここで

$$d(\sigma, e, \beta) = \sum_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)>i}}^{n} \left\{ \sum_{k=1}^{i-1} \min\{e_i + \beta_k, 0\} + \sum_{k=i+1}^{\sigma(i)-1} \min\{e_i + \beta_k + 1, 0\} + \sum_{k=\sigma(i)+1}^{n} \min\{e_i + \beta_k + 2, 0\} \right\}$$

とおいた. □

証明は, $S_{\sigma,e,\epsilon}$ の定義により

$$\mathrm{tr}\,(S_{\sigma,e,\epsilon} \cdot T[\gamma]) = \sum_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)=i}}^{n} \sum_{k=1}^{n} \epsilon_i v_k p^{e_i+\beta_k} {\gamma_{ki}}^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ \sigma(i)>i}}^{n} \sum_{k=1}^{n} 2 v_k p^{e_i+\beta_k} \gamma_{ki} \gamma_{k\sigma(i)}$$

となることに注意すれば容易である. その際, Lemma 4.4 (iii), (iv) を用いる.

4.4 定理の証明

以上のデータをとりまとめて, 定理にある $\alpha_p(T, S)$ の公式を出すことは困難ではない. 実際, 無限等比級数の和の公式を何度か用いるだけである.

参考文献

[C] J. W. S. Cassels, *Rational quadratic forms*, Academic Press, 1978.

[HW] A. G. Helminck and S. P. Wang, On rationality properties of involutions of reductive groups, *Advances in Math.* **99**(1993), 26–96.

[H1] Y. Hironaka, On a denominator of Kitaoka's formal power series attached to local densities, *Comment. Math. Univ. St. Paul.* **37**(1988), 159–171.

[H2] Y. Hironaka, Local zeta functions on hermitian forms and its application to local densities, *J. Number Theory* **71**(1998), 40–64.

[HS] Y. Hironaka and F. Sato, Local densities of alternating forms, *J. Number Theory* **33**(1989), 32–52.

[Ka1] H. Katsurada, An explicit formula for the Fourier coefficients of Siegel-Eisenstein series of degree 3, *Nagoya Math. J.* **146**(1997), 199–223.

[Ka2] H. Katsurada, An explicit formula for Siegel series, *Amer J. Math.* **121**(1999), 415 –452.

[Ki1] Y. Kitaoka, A note on local densities of quadratic forms, *Nagoya Math. J.* **92**(1983), 145–152.

[Ki2] Y. Kitaoka, Fourier coefficients of Eisenstein series of degree 3, *Proc. Japan Acad.* **60**, Ser. A(1984), 259–261.

[Ki3] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms and Fourier coefficients of Eisenstein series, *Nagoya Math. J.* **103**(1986), 149–160.

[Ki4] Y. Kitaoka, Local densities of quadratic forms, *Adv. Studies in pure Math.* **13**(1988), Investigations in Number Theory, 433–460.

[Ki5] Y. Kitaoka, *Arithmetic of quadratic forms*, Cambridge Tracts in Mathematics 106, Cambridge University Press, 1993.

[M1] H. Maass, Die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten grades, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **34**(1964), 1–25.

[M2] H. Maass, Über die Fourierkoeffizienten der Eisensteinreihen zweiten grades, *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.* **38**(1972), 1–13.

[O] M. Ozeki, On certain generalized Gaussian sums, *Proc. Japan Acad.* **58**, Ser. A(1982), 223–226.

[P] G. Pall, The weight of a genus of positive n-ary quadratic forms, *Proc. Symp. pure Math.* **8**(1965), 95–105.

[S] C. L. Siegel, Über die analytische Theorie der quadratischen Formen, *Ann. Math.* **36**(1935), 527–607.

[Y] Tonghai Yang, An explicit formula for local densities of quadratic forms, *J. Number Theory* **72**(1998), 309–356.

[W] G. L. Watson, The 2-adic density of a quadratic form, *Mathematika* **23**(1976), 94–106.